4.4 Forces conservatives

- Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi (mais uniquement de la position des deux points)

- Une telle force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $V(\vec{r})$ tel que:

$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$\vec{\nabla}$ est le gradient

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

La variation infinitésimale de $f(\vec{r})$ est:

$$df(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

- Dans ce cas, on a:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 dV(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$$

donc: $V(\vec{r}_1) + K_1 = V(\vec{r}_2) + K_2$

Théorème de l'énergie mécanique:
Pour des forces conservatives, l'énergie mécanique E (énergie cinétique + énergie potentielle) est conservée

$$\boxed{E = K + V(\vec{r}) = \text{ constante}}$$

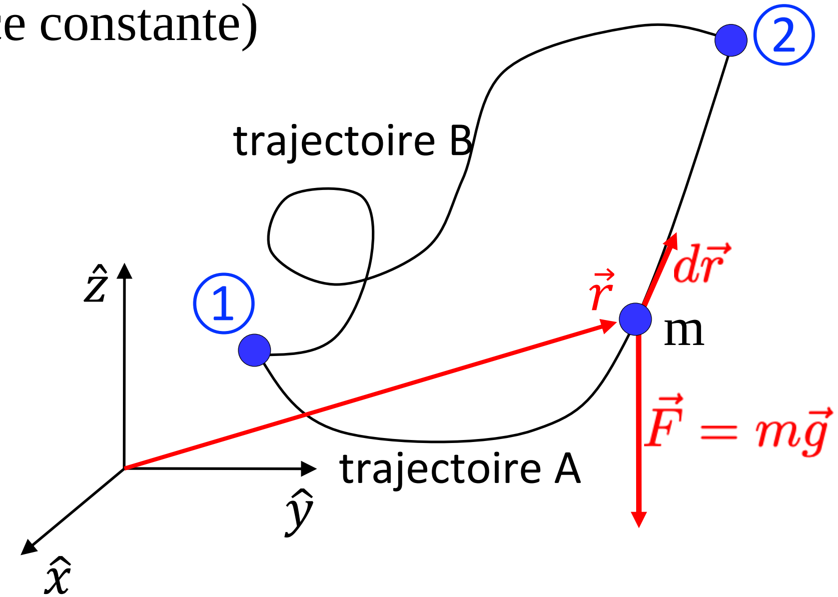
4.4 Ex.: travail de la force de pesanteur

(ou, plus généralement, d'une force constante)

$$W_{12} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg\vec{e}_z \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_1^2 -mg\, dz = -mgz \,\Big|_1^2 = mgz_1 - mgz_2$$

$$W_{h0} = V(z) - V(0) \quad \Leftrightarrow \quad V(z) = mgz$$



- Le travail ne dépend que des coordonnées z_1 et z_2 des points 1 et 2 ;
  il ne dépend pas de la trajectoire suivie entre ces deux points

- Le travail de la force de pesanteur est nul le long d'une trajectoire fermée quelconque:

$$W_{1\to2\to1} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_2^1 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg(z_1 - z_2) + mg(z_2 - z_1) = 0$$

- On écrit: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

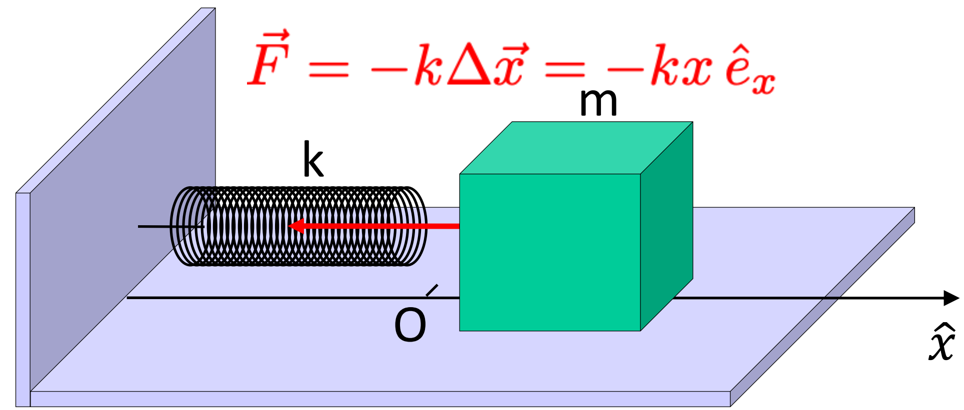
démo: travail dans champs gravitationnel-635

4.4 Ex.: Travail de la force de rappel d'un ressort

$$W_{0x} = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^x -kx\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^x = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$W_{0x} = V(0) - V(x) \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



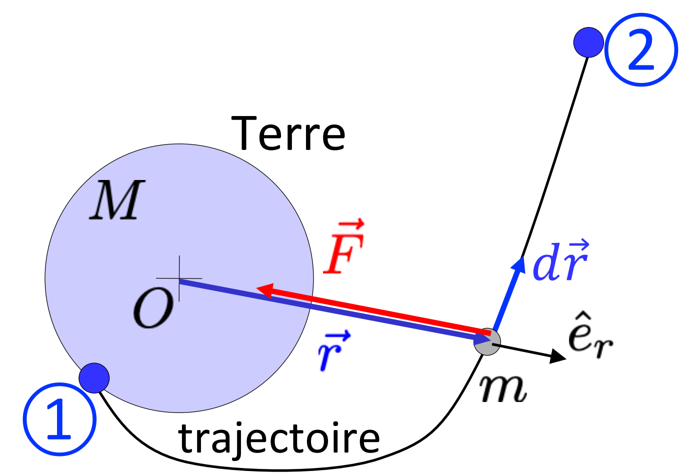
4.4 Ex.: Travail d'une force centrale en $1/r^2$

(par ex.: force de gravitation. G =6.67 10^{-11} N m^2 / kg^2 est la constante universelle de gravitation)

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2}dr = -\left(-\frac{GmM}{r}\right)\Big|_1^2 = -\frac{GmM}{r_1} + \frac{GmM}{r_2}$$

$$W_{rr_\infty} = V(r) - V(r_\infty) \quad \Leftrightarrow \quad V(r) = -\frac{GmM}{r}$$



4.4 Energie potentielle

- L'énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près
- Elle représente le travail que la force doit fournir pour amener le point matériel (avec vitesse nulle) à une position de référence arbitraire $\vec{r}_0$ (où $V(\vec{r}_0) = 0$ par définition):

$$\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) = -V(\vec{r})$$

Exemple de force :		Energie potentielle associée :
Ressort :	$F = -kx$	$V = \frac{1}{2}kx^2 + C$
Pesanteur :	$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\,\hat{e}_z$	$V = mgz + C$
Gravitation :	$\vec{F} = -(GMm/r^2)\,\hat{e}_r$	$V = -GMm/r + C$
Centrale :	$\vec{F} = F(r)\,\hat{e}_r$	$V = -\int_0^r F(r')dr' + C$
Frottement :	$\vec{F} = -f(v)\,\hat{v}$	aucune (force non conservative)

4.4 Forces conservatives

- Force conservative:
  - force $\vec{F}$ dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée (quels que soient ces points), et non de la trajectoire entre les deux

- Propriétés:

La force $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ est conservative

$\Updownarrow$

Il existe une fonction V($\vec{r}$) (énergie potentielle) telle que $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$

$\Updownarrow$

$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ $\quad \forall$ courbe fermée

$\Updownarrow$

Il existe une fonction V($\vec{r}$) telle que

$$\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) = -V(\vec{r})$$

$\Updownarrow$

Le champ de force $\vec{F}(\vec{r})$ est irrotationnel $\Leftrightarrow$ $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r}) = 0, \forall\, \vec{r}$

Notations d'analyse vectorielle :

Operateur Nabla: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$

Gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\vec{r}) = \vec{\nabla} V(\vec{r})$

Rotationel : $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r})$

4.5 Théorème de l'énergie

- Point matériel soumis à:
  - des forces conservatives $\vec{F}^C = \sum_k \vec{F}_k = \sum_k -\vec{\nabla} V_k(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$
  - des forces non conservatives de résultante $\vec{F}^{NC} = \sum_k \vec{F}_k^{NC}$
- Travaille des forces

$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}^C + \vec{F}^{NC}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + \int_1^2 \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}^C + \vec{F}^{NC}) \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + \int_1^2 \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

- Entre les points 1 et 2, on a: $W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1 - V(\vec{r}_1) + V(\vec{r}_2) = E_2 - E_1$

$$\boxed{W_{12}^{NC} = E_2 - E_1}$$

Théorème de l'énergie
La variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non-conservatives

- si toutes les forces sont conservatives: $\boxed{E = \text{constante}}$

Conservation de l'énergie mécanique

démo: bille dans saladier

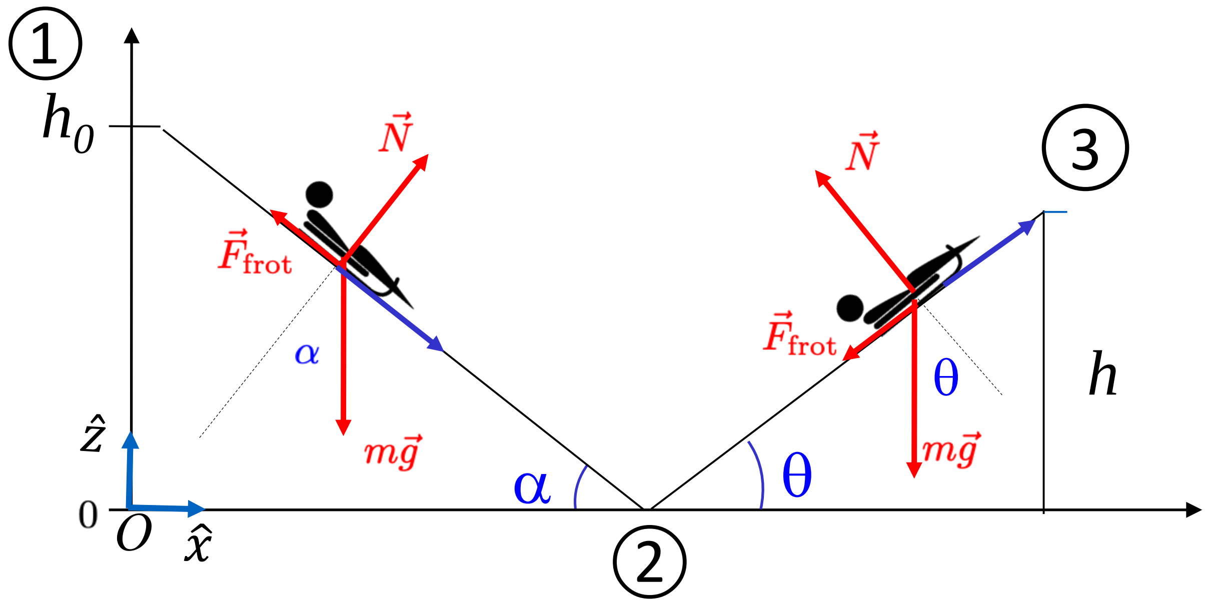
4.5 Ex.: Lugeur

- Un lugeur part au repos au point 1 : quelle est sa vitesse au point 2?
- Point de départ 1 : $z_1 = h_0, v_1 = 0$

$$E_1 = mgz_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_0$$

- Point d'arrivée 2 : $z_2 = 0, v_2 = ?$

$$E_2 = mgz_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$



- Théorème de l'énergie :

$$E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}_{frot} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\vec{F}_{frot}\, ds = -mg\mu_c \cos\alpha \frac{h_0}{\sin\alpha}$$

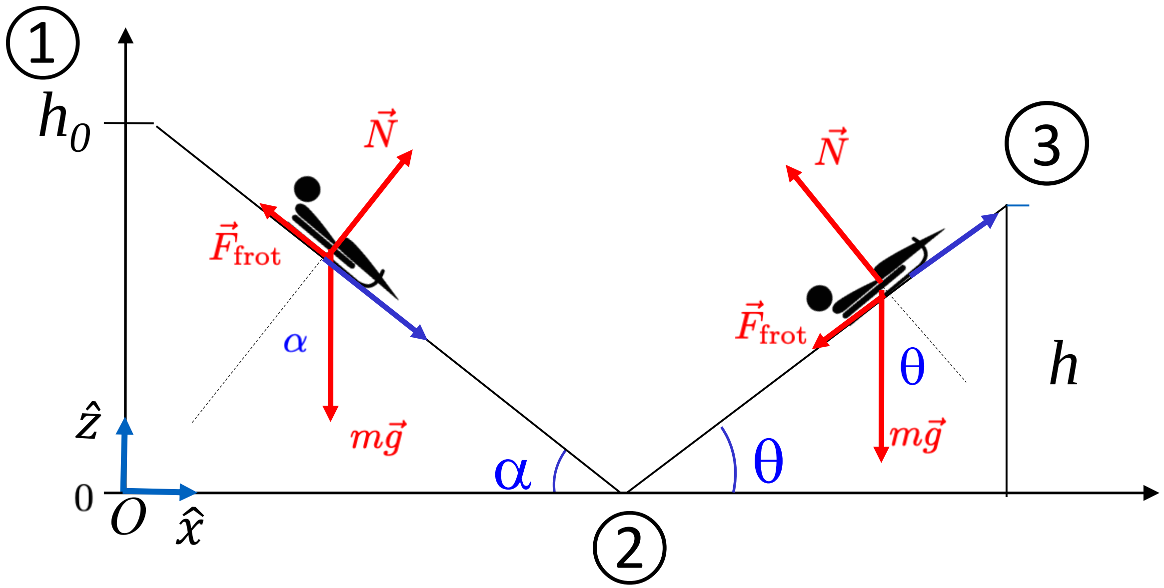
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgh_0 = -mg\mu_c \cos\alpha \frac{h_0}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_2^2 = gh_0 - g\mu_c \frac{h_0}{\tan\alpha}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_0\left(1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right)}$$

- Pente suffisante pour luger si : $\tan\alpha > \mu_c$

4.5 Ex.: Lugeur

- Après avoir dépassé le point 2, le lugeur remonte la pente d'en face: quelle est la hauteur qu'il atteint?



- Point de départ 1 : $z_1 = h_0, v_1 = 0$

$$E_1 = mgz_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_0$$

- Point d'arrivée 3 : $z_2 = h?, v_3 = 0$

$$E_3 = mgz_3 + \frac{1}{2}mv_3^2 = mgh$$

- Théorème de l'énergie :

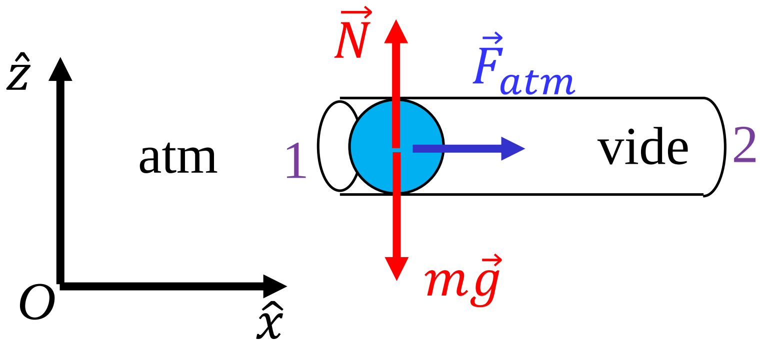
$$E_3 - E_1 = W_{13}^{NC} = \int_1^3 \vec{F}_{frot} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\vec{F}_{frot}\, ds + \int_2^3 -\vec{F}_{frot}\, ds = -mg\mu_c \cos\alpha \frac{h_0}{\sin\alpha} - mg\mu_c \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

$$mgh - mgh_0 = -mg\mu_c \cos\alpha \frac{h_0}{\sin\alpha} - mg\mu_c \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad h\left(1 + \frac{\mu_c}{\tan\theta}\right) = h_0\left(1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right)$$

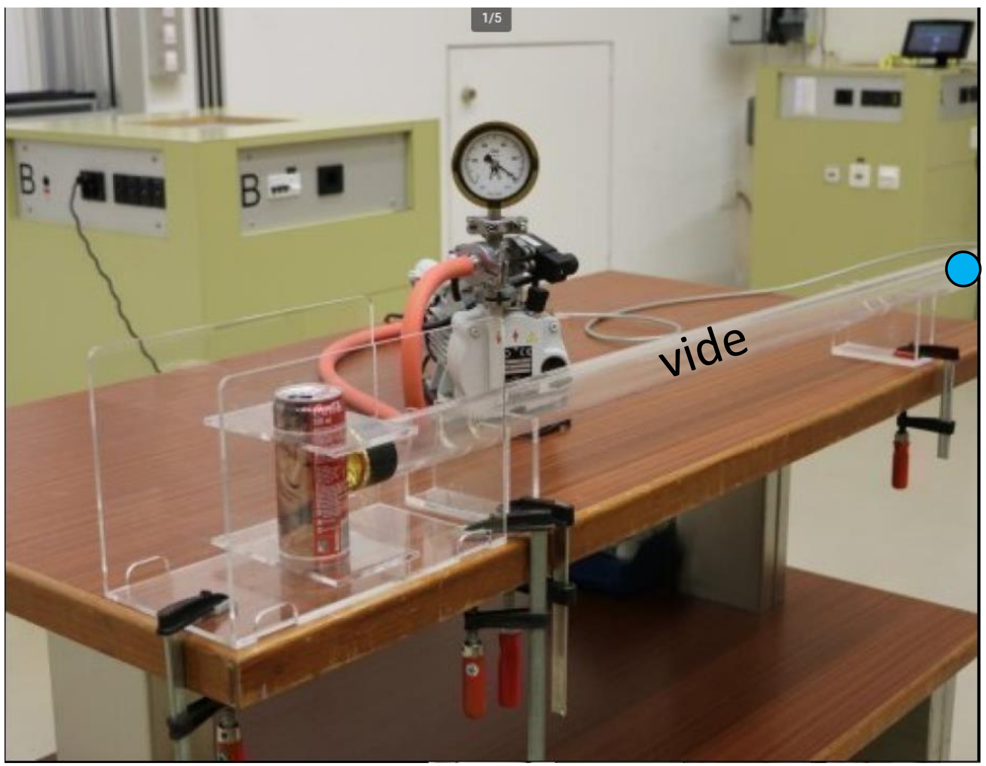
$$h = h_0\left(1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right) / \left(1 + \frac{\mu_c}{\tan\theta}\right)$$

4.5 Ex.: canon à vide

Demo: canon à vide https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/609



Cylindre de rayon R et longueur L.
Une balle de ping pong à l'extrémité (1) et accélérée par la pression atmosphérique vers l'extrémité (2)



Que se passe-t-il entre la canette et la balle de ping pong?

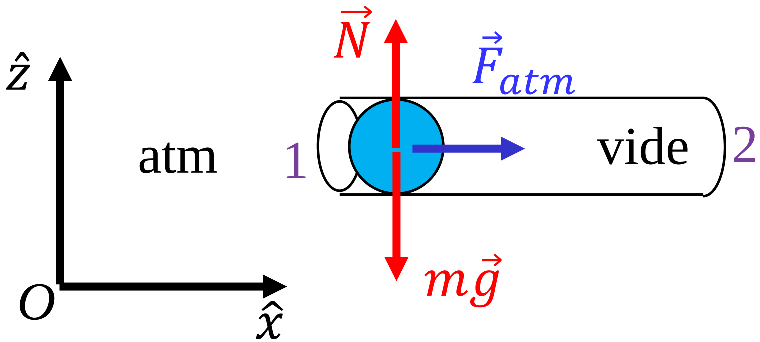
1) La balle rebondit avec la canette presque indéformée

2) La balle déforme la canette et les deux se collent l'une à l'autre.

3) La canette est coupée en deux

4.5 Ex.: canon à vide

Demo: canon à vide https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/609



Cylindre de rayon R et longueur L.
Une balle de ping pong à l'extrémité (1) et accélérée par la pression atmosphérique vers l'extrémité (2)

Mouvement selon $\hat{x}$ $\Rightarrow$ $\vec{N}$ et $m\vec{g}$ ne travaillent pas (perpendiculaires au déplacement)

$$\vec{F}_{atm} = \pi R^2 P_{atm}\hat{x} \qquad W_{atm} = \int_1^2 \vec{F}_{atm}\cdot d\vec{r} = \pi R^2 P_{atm} L$$

Théorème de l'énergie cinétique:

$$W_{atm} = \pi R^2 P_{atm} L = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \qquad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\pi R^2 P_{atm} L}{m}}$$

$P_{atm}=10^5$ Pa,
$R = 2\ 10^{-2}$ m,
$L = 2$ m,
$m = 3\ 10^{-3}$ Kg

$\Rightarrow$ $v \sim 400$ m/s ~ 1400 Km/h

Effet identique à une masse M qui tombe d'une hauteur $h = 1$m

$$\frac{1}{2}mv^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad M = \frac{mv^2}{2gh} \sim 24 \text{ Kg}$$

On transforme l'énergie cinétique (balle de ping pong) ou potentiel (masse M qui tombe) en déformation de la canette

4.5 L'énergie mécanique: intégrale première

$$\text{Si } E = \tfrac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}) \text{ est une constante, alors, par dérivation :}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})\right) = \tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) + \frac{dV(\vec{r})}{dt}$$

$$= m\vec{a}\cdot\vec{v} + \left(\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= m\vec{a}\cdot\vec{v} + \vec{\nabla}V(\vec{r})\cdot\vec{v} = \left(m\vec{a} - \vec{F}\right)\cdot\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

- On dit que l'énergie mécanique, si elle est conservée, est une **intégrale première** des équations du mouvement (équivalente à la loi de Newton mais seules les dérivées premières interviennent)

- On verra que, de manière générale :
  - les constantes du mouvement sont des intégrales premières
  - les lois de conservation donnent des équations différentielles faisant apparaître les dérivées premières des variables définissant la position (plutôt que les dérivées secondes comme dans la 2ème loi de Newton) $\Longrightarrow$ solutions des problèmes (souvent) plus facile que résoudre $\vec{F} = m\,\vec{a}$

4.5 Energie mécanique d'un oscillateur harmonique

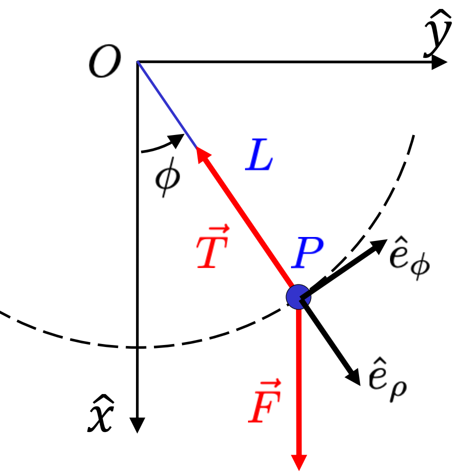
$$m\ddot{x} = -kx \;\Rightarrow\; m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}}$$

énergie cinétique + énergie potentielle = énergie mécanique totale

4.5 Energie mécanique d'un pendule

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\sin\phi \;\Rightarrow\; \ddot{\phi}\dot{\phi} = -\frac{g}{L}\sin\phi\,\dot{\phi} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{L}\cos\phi\right)$$



$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{L}\cos\phi \quad \text{est une constante (intégrale première)}$$

Donc: $$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2}_{\frac{1}{2}mv^2} \underbrace{-mgL\cos\phi}_{+mg(-x)} = \text{constante}}$$

énergie cinétique + énergie potentielle = énergie mécanique totale

énergie potentielle dans le champ de pesanteur = $mg \times h$

$L^2\dot{\phi}^2 = L^2\omega^2 = v^2$ mouvement circulaire de rayon L

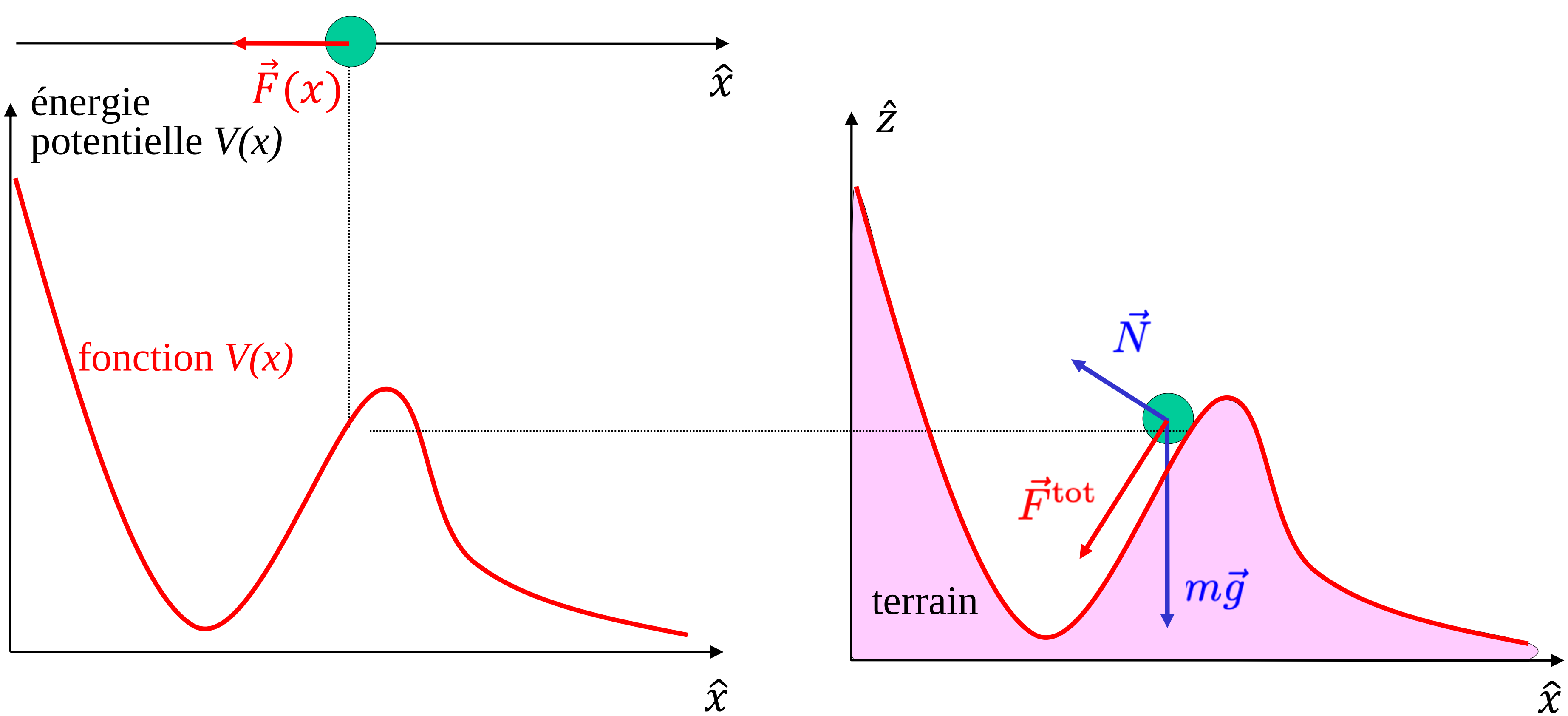
4.6 Forces conservatives: équilibre et petites oscillations

Forces conservatives $\Rightarrow$ énergie potentielle permet de discuter le mouvement, en particulier la stabilité des points d'équilibre

- Situation abstraite:
  Point matériel se déplaçant sur un axe x et soumis à une force conservative

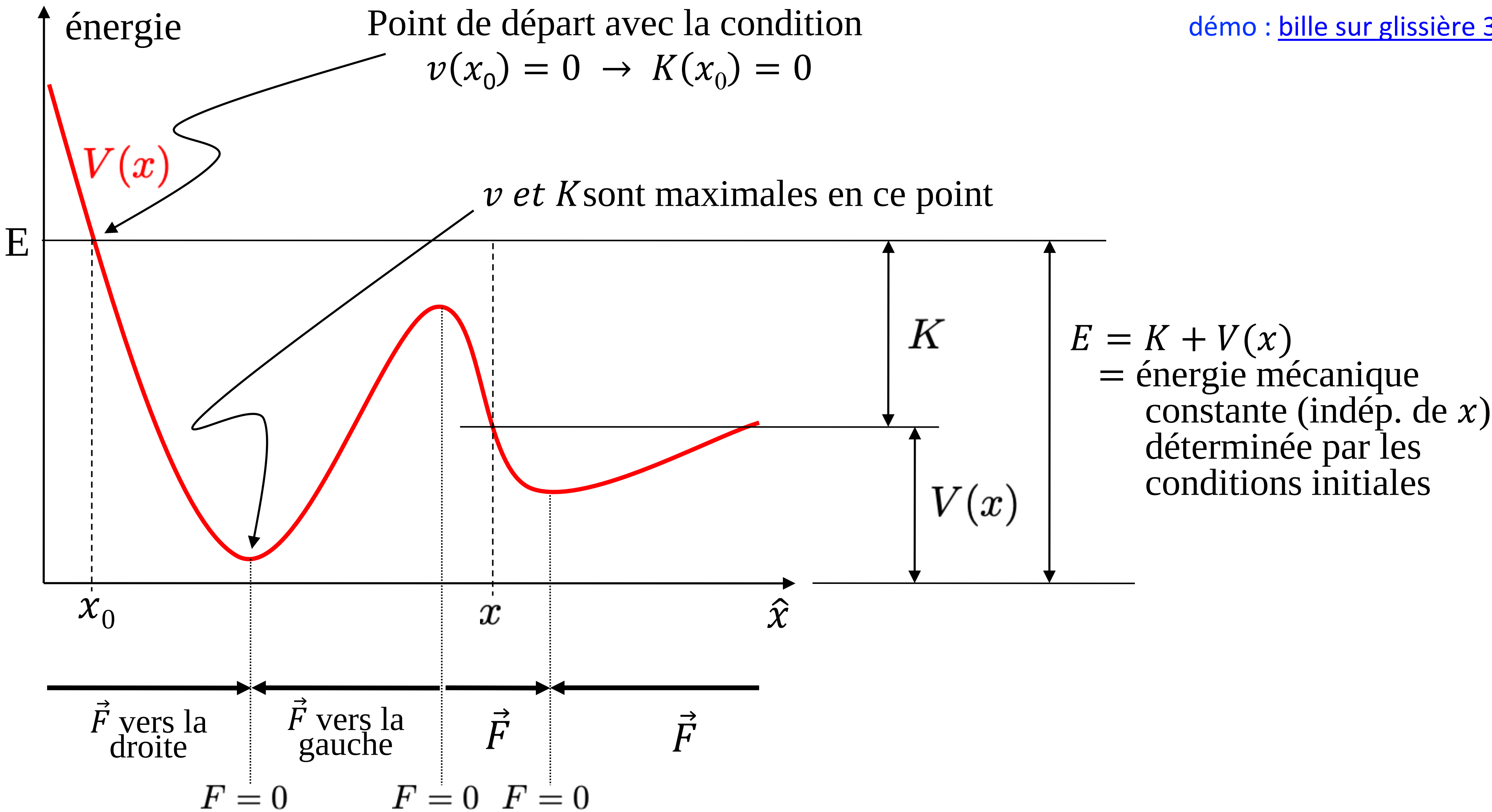
$$\vec{F}(x) = -\frac{dV(x)}{dx}\hat{x}$$

- Example pratique:
  Bille soumise à son poids et contrainte à se déplacer (sans frottement) sur un relief.
  Dans ce cas, $V(x) = mgz(x)$ est l'énergie potentielle de cette bille



4.6 Mouvement rectiligne dans un potentiel: discussion qualitative

démo : bille sur glissière 392



Force F = −dérivée de $V(x)$ = −pente de la courbe $\Rightarrow$

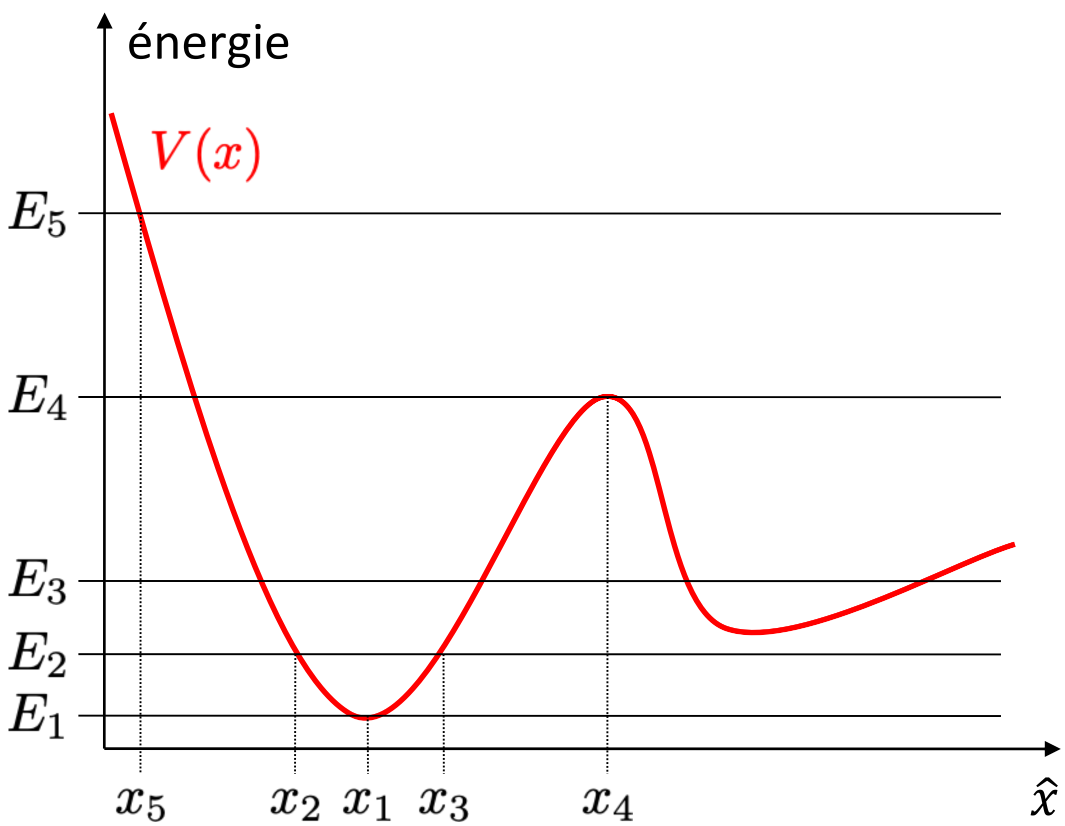
$F = 0$ aux extrema de la fonction $V(x)$

4.6 Mouvement rectiligne dans un potentiel: discussion qualitative (suite)

Condition :

$$K = E - V(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; E \geq V(x)$$

$\Rightarrow$ les positions x telles que
$V(x) > E$ sont inaccessibles



Cas particuliers :

- Si $E = E_1$:
  $x = x_1$ constante;
  x_1 = point d'équilibre ($F = 0, v = 0$)

- Si $E = E_2$:
  oscillations entre x_2 et x_3;
  x_2, x_3 : points d'arrêt ($v = 0$)
  $\vec{F}(x_2)$=-$\frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x_2}\hat{x} = -\vec{F}(x_3)$: la force $\vec{F}(x)$ tend à ramener vers x_1

- Si $E = E_3$:
  deux plages en x permises, séparées par une « barrière de potentiel »

- Si $E = E_4$:
  position d'équilibre instable en $x = x_4$ ($F = 0, v = 0$); la force $\vec{F}(x)$ tend à éloigner de x_4

- Si $E = E_5$:
  $x > x_5$; le point matériel part à l'infini

4.6 Equilibre et petites oscillations

1) L'étude de l'énergie potentielle $V(x)$ (ou de la force $\vec{F}(x)$) permet de déterminer les points d'équilibre, ainsi que les fréquences des petites oscillations autour des points d'équilibre stables

$$\boxed{F(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 \text{ est un point d'équilibre}}$$

2) Développement limité autour d'un point d'équilibre x_0 (pour x proche de x_0):

la fonction *V(x)* est approximée par une parabole (développement au deuxième ordre)

$$V(x) = V(x_o) + \frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x_o}(x - x_o) + \frac{1}{2}\frac{d^2V(x)}{dx^2}\Big|_{x_o}(x - x_o)^2 + \cdots =$$

$$V(x_o) + V'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2}V''(x_o)(x - x_o)^2 + \cdots \cong V(x_o) + \frac{1}{2}V''(x_o)(x - x_o)^2$$

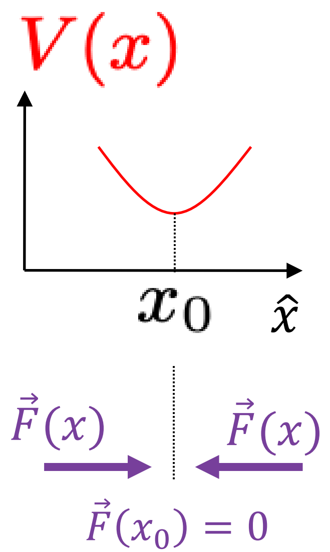
$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -V'(x) = -V''(x_o)(x - x_o)$$

On reconnait la force et l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de raideur $k = V''(x_o)$

$$V'(x) = V'(x_o) + V''(x_o)(x - x_o) \cong V''(x_o)(x - x_o)$$

4.6 Equilibre et petites oscillations

Deux cas importants:



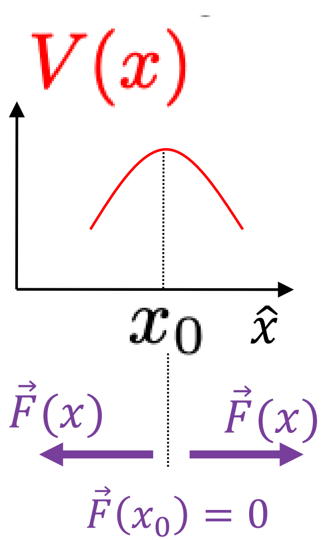
$$V''(x_o) > 0$$

$$F(x) = -V''(x_o)(x - x_o)$$

$$x > x_0 \rightarrow x - x_0 > 0 \rightarrow F(x) < 0$$
$$x < x_0 \rightarrow x - x_0 < 0 \rightarrow F(x) > 0$$

Equilibre stable, garanti par une force de rappel:

Le mouvement correspond à des petites oscillations autour du point d'équilibre de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V''(x_o)}{m}}$



$$V''(x_o) < 0$$

$$F(x) = -V''(x_o)(x - x_o)$$

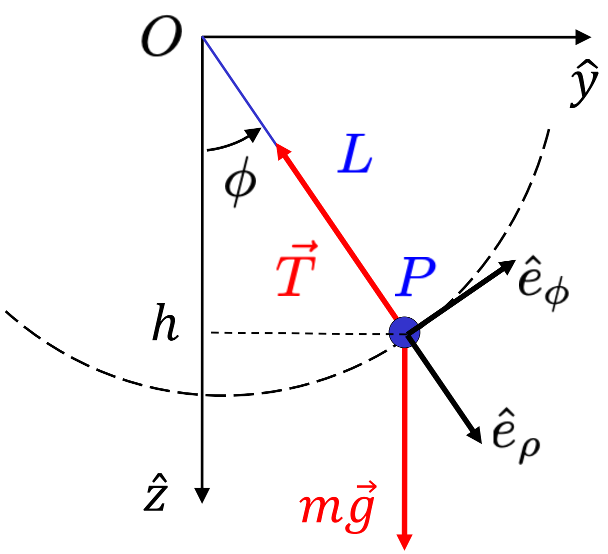
$$x > x_0 \rightarrow x - x_0 > 0 \rightarrow F(x) > 0$$
$$x < x_0 \rightarrow x - x_0 < 0 \rightarrow F(x) < 0$$

Equilibre instable:

La force éloigne le point matériel de la position d'équilibre dès que $x \neq x_0$

4.6 Ex.: pendule rigide

- Point matériel attaché à une tige rigide de longueur L, soumis à son poids mg et restant dans un plan vertical :



Energie potentielle: $V = -mgh = -mgL\cos\phi$

- Recherche des positions d'équilibre :

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = mgL\sin\phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \phi_0 = \pi \end{cases}$$

- Stabilité des point d'équilibre:

$$\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = mgL\cos\phi \Rightarrow \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}\Big|_{\phi=\phi_0} = \begin{cases} mgL > 0 \quad si \quad \phi_0 = 0 \\ -mgL < 0 \quad si \quad \phi_0 = \pi \end{cases}$$

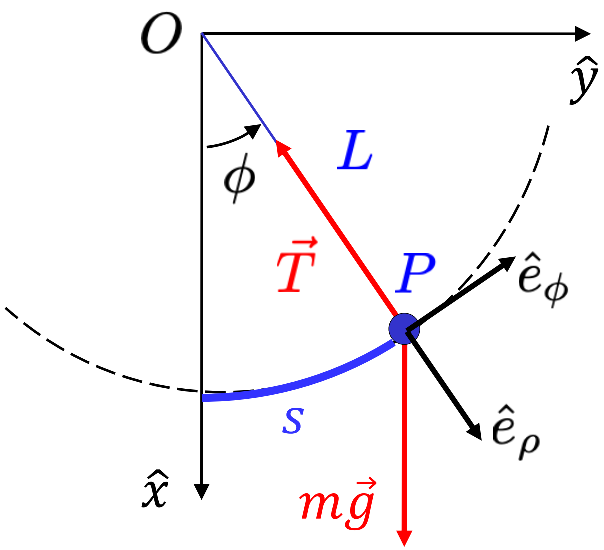
Equilibre stable

Equilibre instable

4.6 Ex.: pendule rigide

- Pour calculer la force autour du point d'équilibre il faut se rappeler que :

$$\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) = -V(\vec{r}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$



avec $\vec{r}$ coordonnée de déplacement (longueur)

- Coordonnée curviligne: $s = L\phi \quad \Rightarrow$

$$V(s) = -mgL\cos\phi(s) = -mgL\cos\frac{s}{L}$$

- Force: $F(s) = -V''(s_0)(s - s_0)$

- Pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable

$(s_0 = 0 \Leftrightarrow \phi_0 = 0)$: $\omega = \sqrt{\dfrac{V''(s_0)}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

Même résultat obtenu en appliquant la 2^{eme} loi de Newton

$$V'(s) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s} = V'(\phi)\frac{1}{L}$$

$$V''(s) = \frac{\partial V'(s)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s} = V''(\phi)\frac{1}{L^2} \quad \Rightarrow \quad V''(s_0) = \frac{1}{L^2}V''(\phi_0) = \frac{1}{L^2}mgL = \frac{mg}{L}$$